МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ

МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

М.В. Федоров, О.М. Хренов

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З ДИСЦИПЛІНИ

"ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА"

(для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 – "Будівництво", спец. – "Промислове та цивільне будівництво", "Міське будівництво та господарство")

Харків – ХНАМГ – 2009

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 – ”Будівництво”, спец. “Промислове та цивільне будівництво”, “Міське будівництво та господарство”. Укл. Федоров М.В., Хренов О.М.; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2009. – 47 с.

Укладачі: М.В.Федоров,
О.М. Хренов

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу й узгоджені з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендовані для студентів будівельних спеціальностей.

Рецензент: доцент кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки, канд. техн. наук І.В. Наумейко.

Рекомендовані кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 9 від 24.03.2009р.

Заняття 1.

Основні поняття теорії ймовірностей. Класичне визначення імовірності. Елементи комбінаторики. Безпосередній підрахунок імовірності.

$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}$ — формула безпосереднього підрахунку імовірності.

Тут A – випадкова подія,

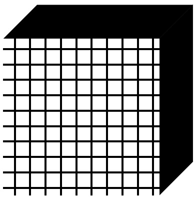
$P(A)$ - імовірність випадкової події А,

n – число елементарних подій розглянутого досліду,

m - число елементарних подій розглянутого досліду, сприятливих події A.

Задача 1. Кубик, усі грані якого пофарбовані, розпиляний так, що кожне його ребро розділене на 10 частин. З отриманої безлічі кубиків довільно вибирають один. Яка імовірність того, що в нього пофарбовані: 1) 3 грані (подія А); 2) 2 грані (подія В); 3) 1 грань (подія С); 4) ні однієї грані (подія D); 5) хоча б одна грань (подія E); 6) 4 грані (подія F); 7) не менше двох граней (подія G).

Вирішення.



Для розглянутої задачі елементарною подією є подія, що полягає в появі одного конкретного маленького кубика, тому що:

- у результаті досліду, хоча б один кубик буде обраний обов'язково (отже, події утворять повну групу);
- ніякі два кубики не можуть з'явитися одночасно (отже, події попарно неспільні);
- немає об'єктивних причин вважати, що які-небудь кубики в результаті вибору будуть з'являтися частіше, ніж інші (події рівноможливі).

У такий спосіб число елементарних подій для даної задачі дорівнює числу маленьких кубиків, отриманих після того, як був розпиляний великий кубик:

$$n=100.$$

1) Визначимо імовірність події А. Число елементарних подій, сприятливих події А, дорівнює числу кубиків з трьома пофарбованими гранями, а таких кубиків стільки, скільки вершин у куба, тобто 8:

$$m=8,$$

$$P(A)=m/n \quad P(A)=8/1000.$$

Визначимо імовірності інших подій, зазначених у задачі:

2) $m_B=8 \cdot 12=96$ $P(B)=m_B/n$ $P(B)=96/1000$;

3) $m_C=8 \cdot 8 \cdot 6=384$ $P(B)=m_C/n$ $P(C)=384/1000$;

4) $m_D=8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot=512$ $P(D)=m_D/n$ $P(D)=512/1000$

5) $m_E=8+96+384=488$ $P(E)=m_E/n$ $P(E)=488/1000$;

6) $m_F=0$ $P(F)=m_F/n$ $P(F)=0$;

7) $m=96+8=104$ $P(G)=m/n$ $P(G)=104/1000$.

Задача 2. Кинуті 2 монети. Знайти імовірність того, що:

1) на одній монеті випаде «герб» (подія А);
2) хоча б на одній монеті випаде «герб» (подія В).

Вирішення.

Розглянемо події:

1) на першій монеті випав «герб» і на другій монеті випав «герб»;
2) на першій монеті випав «герб», а на другій монеті випала «цифра»;
3) На першій монеті випала «цифра», а на другій монеті випав «герб»;
4) На першій монеті випала «цифра» і на другій монеті випала «цифра».

У результаті досліду обов'язково відбудеться хоча б одна з перерахованих подій, виходить, вони утворять повну групу. Ніякі з двох подій не можуть відбутися одночасно, виходить, вони попарно неспільні. Немає основ вважати, що яка-небудь з подій буде відбуватися частіше, ніж інші, виходить, вони рівноймовірні. У такий спосіб розглянуті події утворять множину елементарних подій досліду: n=4.

Визначимо імовірність події A. Сприятливими їй будуть друга і третя з приведеного списку: m=2.

$$P(A)=m/n \quad P(A)=2/4=0.5.$$

Визначимо імовірність події B. Сприятливими їй будуть перша, друга і третя з наведеного списку: $m_B=3$.

$$P(A)=m_B/n \quad P(B)=3/4=0.75.$$

Задача 3. Кинуто два гральних кубики. Визначити імовірність того, що:

1) сума очок, що випали, дорівнює 7 (подію A);
2) різниця очок, що випали, дорівнює 3 (подія B);
3) сума очок, що випали, дорівнює 7, а різниця дорівнює 3 (подія C);
4) сума очок, що випали, дорівнює 7, якщо відомо, що різниця дорівнює 3 (подія D);

Вирішення.

Розглянемо комбінацію двох чисел (k,r), де k і r можуть приймати значення від 1 до 6. У результаті досліду завжди виходить хоча б одна така комбінація (події утворять повну групу), ніякі дві комбінації не можуть з'явитися одночасно (події попарно неспільні), немає підстав вважати, що які-небудь з комбінацій будуть з'являтися частіше, ніж інші (події рівноймовірні). У такий спосіб множина комбінацій чисел (k,r) утворить простір елементарних подій. Кількість таких комбінацій дорівнює n=36.

1) Сприятливими для події A є комбінації: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). m=6.

$$P(A)=m/n \qquad P(A)=6/36=1/6.$$

2) Сприятливими для події B є комбінації: (1,4), (2,5), (3,6), (4,1), (5,2), (6,3). m=6.

$$P(B)=m/n \qquad P(B)=6/36=1/6.$$

3) Сприятливими для події C є комбінації: (2,5), (5,2). m=2.

$$P(C)=m/n \qquad P(C)=2/36=1/12.$$

4) Оскільки відомо, що в результаті досліду вже випала комбінація чисел, різниця яких дорівнює 3, то множину елементарних подій утворять тільки такі комбінації: (1,4), (2,5), (3,6), (4,1), (5,2), (6,3).

   У цьому випадку n=6.

   Сприятливими для події D є комбінації: (2,5), (5,2). $m_D=2$.

$$P(D)=m_D/n \qquad P(D)=2/6=1/3.$$

Задача 4. На 5 картках написані букви *о, п, р, с, т.* Яка імовірність події A, яка полягає в тому, що, виймаючи картки по одній і розкладаючи їх у порядку виходу, одержимо слово «*спорт*».

Вирішення.

Множину елементарних подій даного досліду утворять усі можливі перестановки з п'яти букв. Кількість таких перестановок $P_5=5!$

Отже, $n=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

Сприятливою події A є тільки одна перестановка «*спорт*».

$m_A=1$.

$$P(A)=m_A/n \quad P(A)=1/120$$

Задача 5. На 6 картках написані букви *о, л, м, о, к, о.* Яка імовірність події A, що полягає в тому, що, виймаючи картки по одній і розкладаючи їх у порядку виходу, одержимо слово «*молоко*».

Вирішення.

Множину елементарних подій даного досліду утворять усі можливі перестановки із шести букв (вважаємо, що букви *о* відмінні одна від одної, і позначимо їх o_1, o_2, o_3). Кількість таких перестановок P_6=6!

Отже, n=5!=1·2·3·4·5·6=720.

Сприятливими події А є перестановки:

$мо_1ло_2ко_3$, $мо_1ло_3ко_2$, $мо_2ло_1ко_3$, $мо_2ло_3ко_1$, $мо_3ло_1ко_2$, $мо_3ло_2ко_1$.

Кількість таких перестановок дорівнює кількості перестановок букв о між собою і дорівнює P_3=3!=6

m_A=6.

$$P(A)=m_A/n \quad P(A)=6/720=1/120$$

Задача 6. На картках написані цифри 1,2,3,4,5,6,7. По однієї виймається три картки. Яка імовірність того, що:

1) у порядку виходу цифр з'явиться число 234 (подія А);
2) з отриманих цифр можна буде скласти число 234 (подія В);
3) можна буде скласти число 525 (подія С).

Вирішення.

1) Множину елементарних подій даного досліду утворять усі можливі розміщення із семи цифр по три. Кількість таких розміщень

$$A_7^3=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!}=210\,.$$

Отже, n=210.

Сприятливим є тільки одне розміщення 234. m_A=1.

$$P(A)=m/n \quad P(A)=1/210.$$

2) Множину елементарних подій даного досліду утворять усі можливі сполучення із семи цифр по три. Кількість таких сполучень

$$C_7^3=\frac{7!}{3!\cdot(7-3)!}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3!\cdot 4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35\,.$$

Отже, n=35.

Сприятливим є тільки одне сполучення, що містить цифри 2, 3, 4. m_A=1.

$$P(A)=m/n \quad P(A)=1/35.$$

3) Множину елементарних подій даного досліду утворять також усі можливі сполучення із семи цифр по три. Отже, n=35.

Число сприятливих подій дорівнює 0, тому що цифра 5 не може з'явитися двічі в жодному сполученні. m=0.

$$P(D)=m/n \quad P(D)=0$$

Подія D є неможлива.

Задача 7. У групі 25 студентів, з них 15 дівчат. Яка імовірність того, що серед перших 6, хто зайшов в аудиторію будуть 4 дівчини?

Вирішення.

Позначимо: А – подія, яка полягає в тому, що серед перших 6, хто ввійшов в аудиторію, виявилося 4 дівчини.

Множину елементарних подій даного досліду утворять усі можливі сполучення з 25 студентів по шести. n= C_{25}^{6}.

Сприятливими події А є всі сполучення, що містять 4 дівчини. Таке сполучення можна одержати, якщо до будь-якого сполучення 4 дівчат, обраних з 15, додати будь-яке сполучення 2 юнаків, обраних з 10. Кількість сполучень 4 дівчат, обраних з 15 дорівнює C_{15}^{4}, а кількість сполучень 2 юнаків, обраних з 10, дорівнює C_{10}^{2}. Тоді кількість сприятливих події А сполучень дорівнює m=$C_{15}^{4} \cdot C_{10}^{2}$

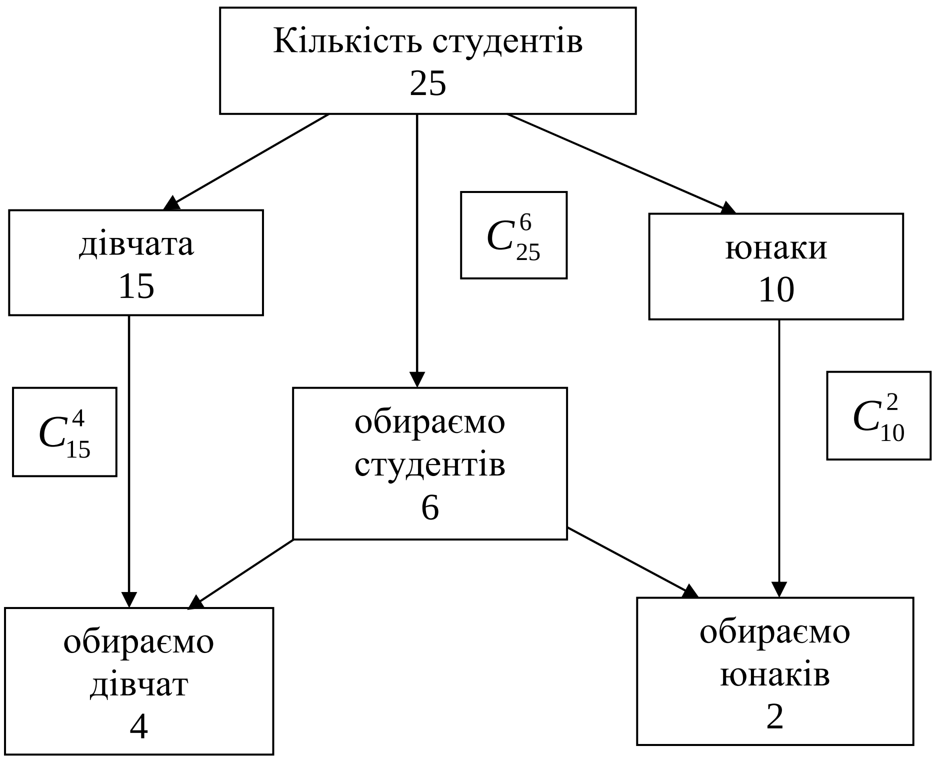
$$P(A)=m_A/n$$

$$P(A)=\frac{C_{15}^{4} \cdot C_{10}^{2}}{C_{25}^{6}}$$

$$P(A)=\frac{\frac{15!}{4!\cdot 11!}\cdot\frac{10!}{2!\cdot 8!}}{\frac{25!}{6!\cdot 19!}}$$

$$P(A) = \frac{(15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12) \cdot (10 \cdot 9) \cdot 6!}{4! \cdot 2! \cdot (25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20)}$$

$$P(A) = \frac{3 \cdot 13 \cdot 9}{2 \cdot 23 \cdot 22} = 0.3468$$



Контрольні питання:

1. Предмет теорії ймовірностей.
2. Достовірна подія.
3. Неможлива подія.
4. Випадкова подія.
5. Спільні й неспільні події.
6. Повна група подій.
7. Події рівноймовірні.
8. Елементарна подія.
9. Сприятливі події.
10. Класичне визначення імовірності. Формула безпосереднього підрахунку ймовірностей.

11.Розміщення. Визначення і формула для підрахунку числа розміщень.

12.Перестановки. Визначення і формула для підрахунку числа перестановок.

13.Сполучення. Визначення і формула для підрахунку числа сполучень.

Заняття 2.

Алгебра подій. Теореми додавання і множення. Моделі надійності технічних систем.

Задача №1. Кинуто гральний кубик. Визначити імовірність випадання парного числа очок.

Вирішення.

Позначимо події::

A – випадання парного числа очок;

A_1 – випадання двох очок;

A_2 – випадання чотирьох очок;

A_3 – випадання шести очок.

$A=A_1+A_2+A_3$

A_1,A_2,A_3 – події неспільні, отже,

$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/6$

$$\mathbf{P(A)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

Задача №2. Кинуто гральний кубик і монету. Визначити імовірність випадання п'яти очок на кубику й герба на монеті.

Вирішення.

Позначимо події:

A– випадання п'яти очок на кубику й герба на монеті;

A_1 – випадання п'яти очок;

A_2 – випадання герба.

$A=A_1A_2$

A_1і A_2 – події незалежні, отже,

$P(A)=P(A_1)P(A_2)$

$P(A_1)=1/6$

$P(A_2=1/2$

P(A)= $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

Задача №3. Імовірність влучення в ціль першої гармати дорівнює 0.7, другої – 0.8. Знайти імовірність пораження цілі при залпі з двох гармат.

Вирішення.

Позначимо події::

A– поразка цілі;

A_1 – влучення першої гармати; $P(A_1)=0.7$

A_2 – влучення другої гармати; $P(A_2=0.8$

<u>1-й спосіб</u>

$A=A_1+A_2$

A_1і A_2 – події спільні, отже,

$P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$

A_1і A_2 – події незалежні, отже,

$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$

$P(A)=0.7+0.8-0.7^{\cdot}0.8$

$P(A)=0.94$

<u>2-й спосіб</u>

Додатково позначимо:

$\bar{A}_1$ – промах першої гармати; $\bar{A}_2$ – промах другої гармати.

A_1 и $\bar{A}_1$ – події протилежні, тому що вони неспільні й утворюють повну групу. Тому

$P(\bar{A}_1)=1-P(A_1)$; $P(\bar{A}_1)=1–0.7=0.3$

Аналогічно

$P(\bar{A}_2)=1\text{-}P(A_2)$; $P(\bar{A}_2)=1–0.8=0.2$

Представимо подію А як суму трьох неспільних подій:

$A=A_1A_2+A_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_2$

Тоді

$P(A)=P(A_1A_2)+P(A_1\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1A_2)$

$A_{1,}$ A_2, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$– події незалежні, отже:

$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.7.0.8=0.56$

$P(A_1\bar{A}_2)=P(A_1)P(\bar{A}_2)=0.7.0.2=0.14$

$P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2)=0.3.0.8=0.24$

$P(A)=0.56+0.14+0.16=0.94$

3-й спосіб

Додатково позначимо:

$\bar{A}$ – пораження цілі не було.

А і $\bar{A}$– події протилежні.

$P(A)=1\text{-}P(\bar{A})$

$\bar{A}=\bar{A}_1\bar{A}_2$

$\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$– події незалежні, отже:

$P(\bar{A})=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)=0.3.0.2=0.06$

$P(A)=1–0.06=0.94$

Задача №4. Студент прийшов на іспит, знаючи 20 питань з 30. Визначити імовірність того, що він знає запропоновані йому три питання.

Вирішення.

Позначимо події::

А – студент знає запропоновані йому три питання

A_1 – знає перше питання;

A_2 – знає друге питання;

A_3 – знає третє питання;

$A=A_1A_2A_3$

Події A_1, A_2, A_3 залежні, тому що імовірність того, що студент буде знати відповідь на чергове запитання, залежить від того, чи знав він відповіді на попередні запитання.

$P(A_1)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

$P(A_2/A_1)=\frac{19}{29}$ $\qquad$ $P(A_2/\bar{A}_1)=\frac{20}{29}$

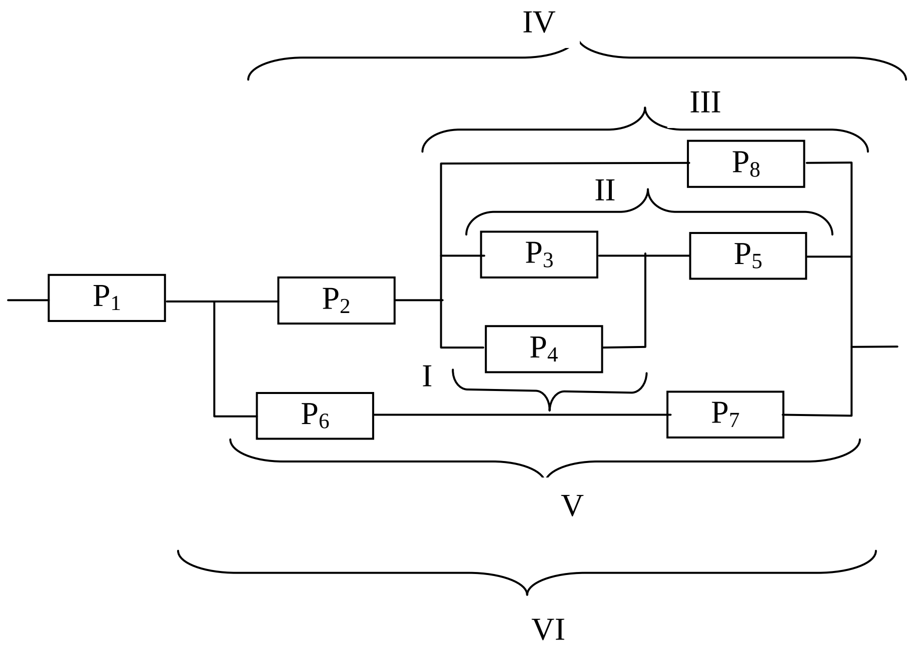
($\bar{A}_1$-студент не знає відповідь на перше питання)

$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$

$P(A_3/A_1A_2)=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}$

$P(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{9}{14}=\frac{57}{203}$ =0.28

Задача №5. Визначити надійність системи за заданою надійністю елементів.



P–надійність усієї системи.

$P=P_1P_{VI}$

$P_{VI}=1-(1-P_{IV})(1-P_V)$

$P_V=P_6P_7$

$P_{IV}=P_2P_{III}$

$P_{III}=1-(1-P_8)(1-P_{II})$

$P_{II}=P_IP_5$

$P_I=1-(1-P_3)(1-P_4)$

Контрольні питання:

1. Сума двох подій.
2. Добуток двох подій.
3. Сума декількох подій.
4. Добуток декількох подій.
5. Теорема про імовірності суми двох подій.
6. Умовна імовірність подій.
7. Теорема про імовірності добутку двох подій.
8. Імовірність добутку декількох подій.
9. Протилежні події.
10. Імовірність суми протилежних подій.
11. Визначення незалежності двох подій.
12. Визначення незалежності декількох подій.
13. Імовірність добутку незалежних подій.
14. Визначення надійності технічної системи.
15. Надійність системи з послідовним з'єднанням елементів.
16. Надійність системи з рівнобіжним з'єднанням елементів.

Заняття 3.

Формула повної імовірності. Формула Бейеса. Повторення іспитів.

Задача 1. У лабораторії є шість комп'ютерів першого типу і чотири комп'ютери другого типу. Імовірність того, що за час виконання деякого розрахунку комп'ютер першого типу не вийде з ладу, дорівнює 0.95, для комп'ютера другого типу ця імовірність дорівнює 0.9. Студент робить розрахунок на випадково обраній машині. Знайти імовірність того ,що до закінчення розрахунку машина не вийде з ладу.

Вирішення.

Позначимо події:

До закінчення розрахунку комп'ютер не вийде з ладу;

B_1 - розрахунок виконують на комп'ютері першого типу;

B_2 - розрахунок виконують на комп'ютері другого типу;

Події B_1 і B_2 неспільні й утворюють повну групу. Подія А завжди відбувається одночасно з однією з подій B_1 або B_2. Тому події B_1 і B_2 можемо прийняти як гіпотези і для обчислення імовірності події А застосувати формулу повної імовірності.

$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)$

Імовірність вибору для розрахунку комп'ютера першого типу, очевидно, дорівнює $P(B_1)=6/10$, для комп'ютера другого типу ця імовірність буде $P(B_2)=4/10$.

З умови задачі також зрозуміло, що $P(A/B_1)=0.95$, а $P(A/B_2)=0.9$.

У підсумку одержуємо:

$P(A)=0.6\cdot 0.95+0.4\cdot 0.9=0.93$

Відповідь: імовірність того, що до закінчення розрахунку випадково обрана машина не вийде з ладу дорівнює 0.93.

Задача 2. На склад надходить продукція трьох фабрик, причому продукція першої фабрики складає 20, другий – 46, третьої – 34%. Відомо, що середній відсоток нестандартних деталей для першої фабрики дорівнює – 3, другої – 2, третьої – 1%. Знайти імовірність того, що випадково взятий виріб, зроблений на першій фабриці, якщо він є стандартним.

Вирішення.

Позначимо події:

A – узятий виріб виявився стандартним;

B_1 - виріб зроблено на першій фабриці;

B_2 - виріб зроблений на другій фабриці;

B_3 - виріб зроблений на третій фабриці.

Необхідно визначити умовну імовірність події B_1, якщо подія A відбулося, тобто величину $P(B_1/A)$.

Події B_1, B_2 і B_3 неспільні й утворюють повну групу. Подія A завжди відбувається одночасно з однією з подій B_1, B_2 або B_3. Тому події B_1, B_2 і B_3 можемо прийняти як гіпотези і для обчислення імовірності $P(B_1/A)$ застосувати формулу Бейеса.

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(Bi) \cdot P(A/Bi)}.$$

З умови задачі знаходимо

$P(B_1)=0.2$; $P(B_2)=0.46$; $P(B_3)=0.34$;

Для кожної фабрики нам відомий середній відсоток нестандартних деталей. Виходить, віднявши цю величину від 100%, ми можемо обчислити середній відсоток стандартних деталей. Перейшовши від відсотків до десяткового дробу, одержимо умовні імовірності події A у випадку, якщо відбулися відповідно події B_1, B_2, B_3.

$P(A/B_1)=1-0.03=0.97$; $P(A/B_2)=1-0.02=0.98$; $P(A/B_3)=1-0.01=0.99$

Тепер можемо обчислити величину $P(B_1/A)$:

$P(B_1/A)=(0.2 \cdot 0.97)/(0.2 \cdot 0.97+0.46 \cdot 0.98+0.34 \cdot 0.99)$

$P(B_1/A)=0.1977$

Відповідь: імовірність того, що випадково взятий виріб зроблений на першій фабриці, якщо він виявився стандартним дорівнює 0.1977.

Задача 3. Гральна кіста кинута п'ять разів. Визначити імовірність того, що шість очок випаде три рази.

Вирішення.

Для даної задачі дослідом є кидання гральної кісти. Таких дослідів п’ять. У кожному з дослідів може відбутися подія А, що полягає у випаданні шести очок. Досліди незалежні, тому що імовірність події А в кожному з дослідів не залежить від результатів інших. Імовірність події А в кожному з дослідів однакова і дорівнює 1/6. Отже, для вирішення задачі ми можемо скористатися формулою Бернуллі.

Кількість незалежних дослідів n=5.

Кількість дослідів, у яких подія А відбудеться цікавляче нас число раз m=3.

Імовірність події А в одному досліді p=1/6.

$$P_5(3)=C_5^3(1/6)^3(1-1/6)^2=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{5\cdot 4\cdot 5^2}{2\cdot 6^5}=\frac{2\cdot 5^3}{6^5}=0.032$$

Відповідь: імовірність того, що шість очок випаде три рази дорівнює 0.032.

Задача 4. Імовірність того, що пасажир запізниться на потяг, дорівнює 0.02. Знайти найімовірнішу кількість спізнілих з 855 пасажирів.

Вирішення.

Число дослідів n дорівнює числу пасажирів, які бажають виїхати. Досліди незалежні, тому що імовірність спізнитися для кожного пасажира не залежить від того спізняться чи ні інші пасажири, ця імовірність дорівнює 0.02. Тому для визначення найімовірнішої кількості спізнілих пасажирів k_0 можемо скористатися формулою

$$np-q\le k_0\le np+p,$$

n=855 p=0.02 q=1-p q=1-0.02=0.98,

$855\cdot 0.02-0.98\le k_0\le 855\cdot 0.02+0.02,$

$16.12\le k_0\le 17.12,$

k_0 – ціле число, отже, $k_0=17$.

Відповідь: найімовірніша кількість спізнілих з 855 пасажирів дорівнює 17

Задача 5. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі 0.8. Знайти імовірність того, що при 100 пострілах мішень буде поражена:

1) 75 разів;
2) не менше 75 разів.

Вирішення.

За умовою задачі виконують 100 незалежних дослідів (пострілів по мішені). У кожному з них може відбутися подія (пораження мішені), імовірність якої не залежить від результатів інших дослідів. У такий спосіб досліди незалежні. Оскільки кількість дослідів велика, то для рішення задачі слід скористатися локальною й інтегральною теоремами Лапласа.

1) Використовуємо локальну теорему Лапласа. Імовірність того, що при n дослідах подія відбудеться m раз, визначається за формулою $P_n(m)=\varphi(x)/\sqrt{(npq)}$,

де

$x=(m-np)/\sqrt{(npq)}$ $q=1-p$,

$n=100$ $m=75$ $p=0.8$ $q=1-0.8=0.2$,

$\sqrt{(npq)}=\sqrt{(100 \cdot 0.8 \cdot 0.2)}=4$ $x=(75-100.0.8)/4=-1.25$.

За таблицею знаходимо

$\varphi(-1.25)=\varphi(1.25)=0.1826$,

$P_{100}(75)=0.1826/4=0.04565$.

2) Використовуємо інтегральну теорему Лапласа. Імовірність того, що при n дослідах подія відбудеться від k_1 до k_2 разів, визначається за формулою:

$$P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$x_1=(k_1-np)/\sqrt{(npq)}$ $x_2=(k_2-np)/\sqrt{(npq)}$,

$n=100$ $k_1=75$ $k_2=100$ $p=0.8$ $q=0.2$,

$x_1=(75-100.0.8)/4=-1.25$ $x_2=(100-100.0.8)/4=5$.

За таблицею знаходимо

$\Phi(-1.25)=-\Phi(1.25)=-0.3944$, $\Phi(5)=0.5$,

$P_{100}(75,100)=\Phi(5) - \Phi(-1.25)=0.5-(-0.3944)=0.8944.$

Відповідь:

1)Імовірність того, що при 100 пострілах мішень буде поражена 75 разів $P_{100}(75)=0.04565$;

2)Імовірність того, що при 100 пострілах мішень буде поражена не менше 75 разів $P_{100}(75,100)=0.8944$.

Задача 6. Було посіяно 29 насінин, з однієї і тією ж імовірністю прорости. Знайти цю імовірність, якщо найімовірніше проросте 24.

Вирішення.

Проведено 29 дослідів – посіяно 29 насінин. Імовірність прорости в кожної насінини не залежить від того, проростуть чи ні інші насінини , тому досліди незалежні. Імовірність прорости для кожної насінини та сама, позначимо її p.

Розглянемо формулу: $np-q\le k_0\le np+p$

$q=1-p \quad n=29 \quad k_0=24$

$$\begin{cases} np-q\le k_0 \\ k_0\le np+p \end{cases} \quad \begin{cases} np-(1-p)\le k_0 \\ k_0\le (n+1)p \end{cases} \quad \begin{cases} (n+1)p-1\le k_0 \\ k_0\le (n+1)p \end{cases} \qquad \begin{cases} p\le (k_0+1)/(n+1) \\ p\ge k_0/(n+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p\le (24+1)/(29+1) \\ p\ge 24/(29+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} p\le 25/30 \\ p\ge 24/30 \end{cases}$$

Відповідь: імовірність прорости для насінин $(4/5)\le p\le (5/6)$ або $0.8\le p\le 0.83$

Контрольні питання:

1. Формула повної імовірності.
2. Формула Бейеса.
3. Формула Бернуллі.
4. Локальна теорема Лапласа.
5. Інтегральна теорема Лапласа.

6. Найімовірніше число настання подій.

Заняття 4.

Дискретна випадкова величина.

Задача 1. У партії 10% нестандартних деталей. Випадково відібрані чотири деталі. Побудувати ряд розподілу й многокутник розподілу для дискретної випадкової величини X – кількість нестандартних деталей серед чотирьох відібраних.

Вирішення.

За умовами задачі випадкова величина X може приймати значення 0,1,2,3,4. Тому для побудови ряду розподілу треба обчислити імовірності P{X=i} (i=0,1,2,3,4).

У партії 10% нестандартних деталей, виходить, імовірність вибору нестандартної деталі можна прийняти рівною 0.1. Будемо вважати цю ймовірність постійною при виборі кожної деталі і, отже, проведені нами досліди є незалежними. Тоді для визначення шуканих ймовірностей P{X=i} (i=0,1,2,3,4) ми можемо скористатися формулою Бернуллі:

$P\{X=i\}=P_4(i)$ $\quad$ $P_4(i)=C_4^i p^i (1-p)^{4-i}$ $\quad$ $p=0.1$ $\quad$ $1-p=0.9$

$P_4(0)=C_4^0(0.1)^0(0.9)^4=0.6561$

$P_4(0)=C_4^1(0.1)^1(0.9)^3=0.2916$

$P_4(0)=C_4^2(0.1)^2(0.9)^2=0.0486$

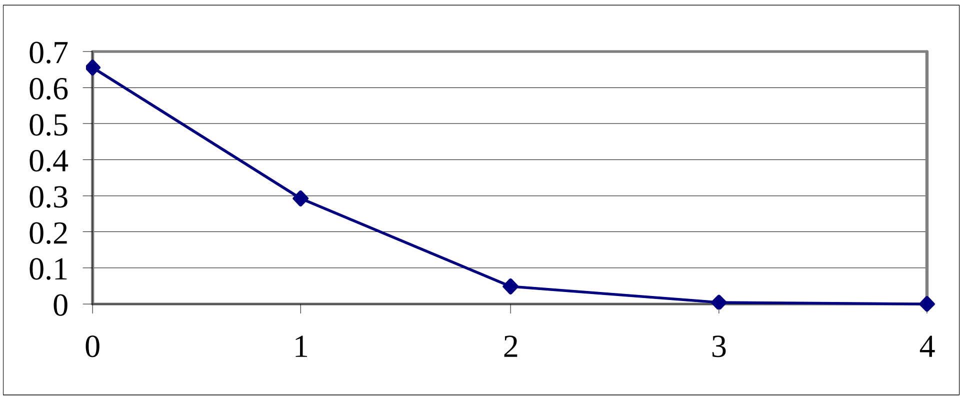
$P_4(0)=C_4^3(0.1)^3(0.9)^1=0.0036$

$P_4(0)=C_4^4(0.1)^4(0.9)^0=0.0001$

Ряд розподілу:

X	0	1	2	3	4
P	0.6561	0.2916	0.0486	0.0036	0.0001

Многокутник розподілу:



Задача 2. У партії із шести деталей чотири деталі стандартні. Випадково відібрані три деталі. Розглядається випадкова величина X – число стандартних деталей серед відібраних. Для цієї випадкової величини побудувати ряд розподілу, многокутник розподілу, функцію розподілу, а також обчислити: m_x, D_x, σ_x , $P\{1 \le X < 3\}$.

Рішення.

За умовами задачі випадкова величина X може приймати значення 1,2,3. Тому для побудови ряду розподілу необхідно обчислити імовірності $P\{X=i\}$ $(i=1,2,3)$. Для обчислення цих ймовірностей використовуємо формулу безпосереднього підрахунку імовірності: $P=(m/n)$.

Елементарною подією для даної задачі є будь-яке сполучення трьох деталей, обраних з наявних шести. Тому

$$n=C_6^3=[6!/(3!\cdot 3!)]=20.$$

Число сполучень сприятливих тому, щоб у вибірці з трьох деталей була одна стандартна, визначається в такий спосіб:

$$m=C_4^1 C_2^2=4\cdot 1=4$$

$P\{X=1\}=4/20=0.2$

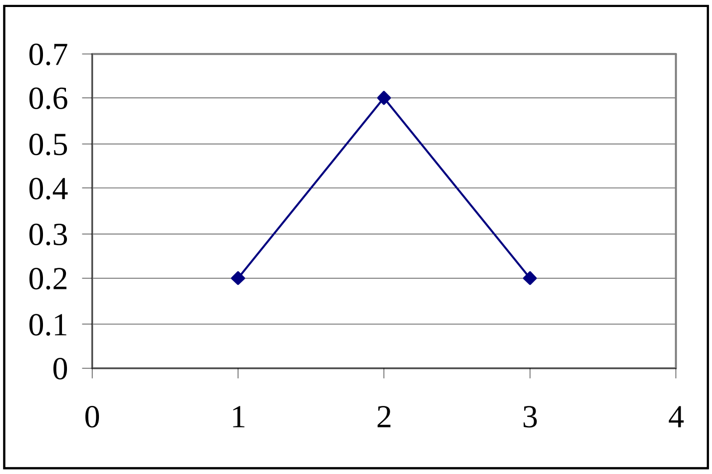
Для $X=2$: $m=C_4^2 C_2^1=[4!/(2!\cdot 2!)]\cdot 2=6\cdot 2=12$ $\quad P\{X=2\}=12/20=0.6$

Для $X=3$: $m=C_4^3 C_2^0=[4!/(3!\cdot 1!)]\cdot 1=4$ $\quad P\{X=3\}=4/20=0.2.$

Ряд розподілу:

X	1	2	3
P	0.2	0.6	0.2

многокутник розподілу:



Побудуємо інтегральну функцію розподілу F(x)=P{X<x}.

$x \le 1$ F(x)=P{X<x}=0

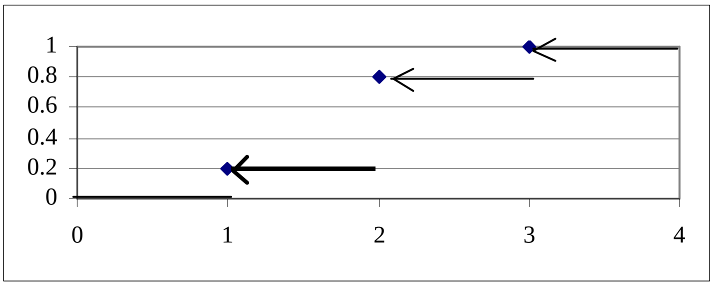
$1<x \le 2$ F(x)=P{X<x}=P{X=1}=0.2

$2<x \le 3$ F(x)=P{X<x}=P{X=1}+P{X=2}=0.2+0.6=0.8

$x>3$ F(x)=P{X<x}=P{X=1}+P{X=2}+P{X=3}=0.2+0.6+0.2=1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 0.2 & 1<x \le 2 \\ 0.8 & 2<x \le 3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

Графік інтегральної функції розподілу має вигляд:



$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$ $m_x = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.2 = 2$

$D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 \, p_i$ $\qquad D_x=\alpha_2-m_x^2$ $\qquad \alpha_2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$

$\alpha_2=1^2\cdot 0.2+2^2\cdot 0.6+3^2\cdot 0.2=0.2+2.4+1.8=4.4$

$D_x=4.4-2^2=0.4$

$\sigma_x=\sqrt{(D_x)}$ $\quad \sigma_x=\sqrt{(0.4)}=0.6325.$

$P\{1\le X<3\}=F(3)-F(1)$ $\quad P\{1\le X<3\}=1-0.2=0.8$

Контрольні питання:

1. Визначення дискретної випадкової величини.
2. Визначення закону розподілу випадкової величини.
3. Ряд розподілу.
4. Многокутник розподілу.
5. Інтегральна функція розподілу випадкової величини. Визначення і властивості.
6. Характеристики положення випадкової величини на числовій осі (математичне чекання, мода, медіана).
7. Початкові й центральні моменти випадкових величин. Властивості моментів випадкових величин.
8. Біноміальний закон розподілу випадкових величин.

Заняття 5.

Безперервна випадкова величина.

Задача 1. Безперервна випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0 \\ a(1-\cos x), & \text{якщо } 0<x\le \pi \\ 1, & \text{якщо } x>\pi \end{cases}$$

Визначити: $f(x)$, значення параметра *a*, імовірність $P\left\{\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}\right\}$, побудувати графіки функцій $F(x)$ и $f(x)$.

Вирішення.

Функція щільності $f(x) = F'(x)$, отже

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 0 \\ a\sin x, & \textit{якщо } 0 < x \le \pi \\ 0, & \textit{якщо } x > \pi \end{cases}$$

Для визначення значення параметра *a* скористаємося властивістю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} a\sin x\,dx + \int_{\pi}^{+\infty} 0\,dx = -a\cos x\Big|_0^{\pi} = -a(\cos\pi - \cos 0) = -a(-1-1) = 2a$$

$2a = 1 \qquad a = \dfrac{1}{2}$

Таким чином, інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 0 \\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & \textit{якщо } 0 < x \le \pi \\ 1, & \textit{якщо } x > \pi \end{cases}$$

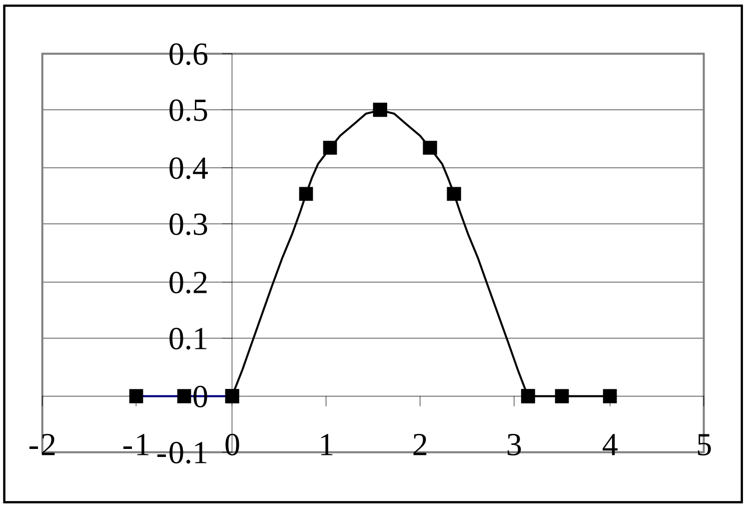
Функція щільності має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 0 \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & \textit{якщо } 0 < x \le \pi \\ 0, & \textit{якщо } x > \pi \end{cases}$$

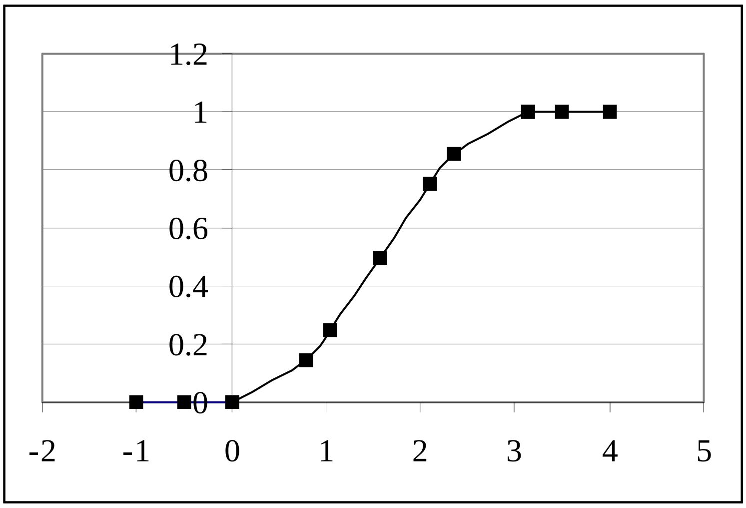
Імовірність улучення випадкової величини на заданий відрізок [a, b] визначається за формулою: $P\{a \le x < b\} = F(b) - F(a)$ або $P\{a \le x < b\} = \int_a^b f(x)$.

$$P\left\{\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}\right\} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(0 - 0.7071) = 0.3536$$

Графік функції щільності *f(x)*:



Графік інтегральної функції розподілу *F(x)*:



Задача 2. Безперервна випадкова величина задана щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ ax, & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Визначити значення параметра *a*, інтегральну функцію розподілу *F(x)*, значення m_x, D_x, σ_x, побудувати графіки функцій *f(x)* і *F(x)*.

Вирішення.

Для визначення значення параметра *a* скористаємося властивістю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_{2}^{4} ax\,dx + \int_{4}^{+\infty} 0\,dx = a\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^4 = \frac{a}{2}\left(4^2 - 2^2\right) = \frac{a}{2}(16-4) = 6a$$

$$6a = 1 \qquad a = \frac{1}{6}$$

Функція щільності має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 2 \\ \frac{1}{6}x, & \textit{якщо } 2 < x \le 4 \\ 0, & \textit{якщо } x > 4 \end{cases}$$

Інтегральну функцію розподілу *F(x)* визначаємо за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

1) $x \le 2$ $\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

2) $2 < x \le 4$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int_{2}^{x} \frac{1}{6} t\,dt = \frac{1}{6}\left.\frac{t^2}{2}\right|_2^x = \frac{1}{12}\left(x^2 - 2^2\right) = \frac{x^2-4}{12}$

3) $x > 4$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int_{2}^{4} \frac{1}{6} t\,dt + \int_{4}^{+\infty} 0\,dt = \frac{1}{6}\left.\frac{t^2}{2}\right|_2^4 = \frac{1}{12}\left(4^2 - 2^2\right) = \frac{1}{12}(16-4) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \le 2 \\ \frac{x^2-4}{12}, & \textit{якщо } 2 < x \le 4 \\ 1, & \textit{якщо } x > 4 \end{cases}$$

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{2} x f(x) dx + \int_{2}^{4} x f(x) dx + \int_{4}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{2} x 0\,dx + \int_{2}^{4} x\left(\frac{1}{6}x\right) dx + \int_{4}^{+\infty} x 0\,dx = \frac{1}{6}\frac{x^3}{3}\Bigg|_2^4$$

$$m_x = \frac{1}{18}\left(4^3 - 2^3\right) = \frac{64-8}{18} = \frac{56}{18} = \frac{28}{9} = 3.11$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx \qquad D_x = \alpha_2 - m_x^2 \qquad \alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

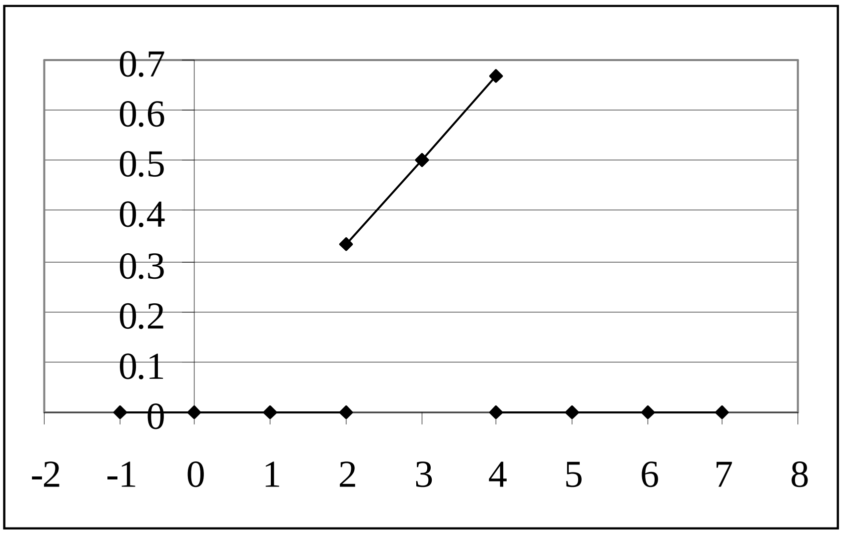
$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{2} x^2 f(x) dx + \int_{2}^{4} x^2 f(x) dx + \int_{4}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{2} x^2 0\,dx + \int_{2}^{4} x^2\left(\frac{1}{6}x\right) dx + \int_{4}^{+\infty} x^2 0\,dx = \frac{1}{6}\frac{x^4}{4}\Bigg|_2^4 = \frac{1}{24}(256-16) = 10$$

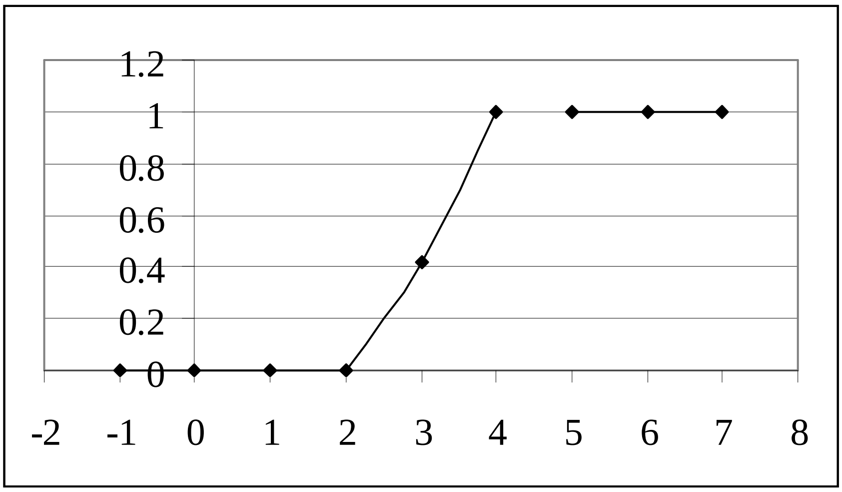
$$D_x = 10 - \left(\frac{28}{9}\right)^2 = 0.321$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \qquad \sigma_x = \sqrt{0.321} = 0.567$$

Графік функції щільності *f(x)*:



Графік інтегральної функції розподілу *F(x)*:



Контрольні питання:

1. Визначення безперервної випадкової величини.
2. Визначення закону розподілу випадкової величини.
3. Інтегральна функція розподілу випадкової величини. Визначення і властивості.
4. Щільність розподілу імовірності. Визначення і властивості.
5. Імовірність влучення безперервної випадкової величини в заданий інтервал.
6. Визначення функції розподілу за відомою щільністю розподілу.
7. Характеристики положення випадкової величини на числовій осі (математичне чекання, мода, медіана).
8. Початкові й центральні моменти випадкових величин. Властивості моментів випадкових величин.
9. Рівномірний закон розподілу випадкової величини (диференціальна й інтегральна функції розподілу і їхні графіки; числові характеристики; імовірність влучення випадкової величини на заданий відрізок).

10. Показовий закон розподілу (диференціальна й інтегральна функції розподілу і їхні графіки; числові характеристики; імовірність влучення випадкової величини на заданий відрізок).
11. Нормальний закон розподілу (диференціальна й інтегральна функції розподілу і їхні графіки; числові характеристики; імовірність влучення випадкової величини на заданий відрізок).

Заняття 6.

Визначення законів розподілу випадкових величин на основі дослідних даних.

Задача. Для заданої вибірки значень випадкової величини:

1. Побудувати статистичний ряд розподілу.
2. Побудувати гістограму.
3. Висунути гіпотезу про закон розподілу випадкової величини.

Алгоритм вирішення задачі.

1. Побудова статистичного ряду розподілу.
   - Знайти серед елементів вибірки мінімальний (x_{min}) і максимальний (x_{mam}).
   - Визначити довжину інтервалу Δ (точність обчислення, що рекомендується, 0.001)

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}; \quad k = 12;$$

   - Визначити границі інтервалів розбивки

$$x_i = x_{\min} + (i-1)\Delta \qquad x_{i+1} = x_{\min} + i\Delta \quad (i = 1, \ldots, k)$$

   - Визначити числа влучення значень випадкової величини в і-ий інтервал m_i. (У разі влучення значення випадкової величини на межу двох інтервалів, слід відносити його до кожного інтервалу зі значенням 0.5)
   - Визначити частоту влучення випадкової величини в і-й інтервал

$p_i^*=m_i/n \qquad n=120$

- Результати оформити у виді таблиці.

2. Побудова гістограми.

- Визначити значення ординати і-ого інтервалу $h_i = \frac{p_i^*}{\Delta}$. Результати подати в таблиці.
- Побудувати графік гістограми. Для побудови графіка гістограми відкладають по осі абсцис інтервали, на кожному з яких будують прямокутник, площа якого дорівнює частоті p_i^*, висота прямокутника дорівнює h_i.

3. За виглядом гістограми візуально визначають вид теоретичного розподілу, до якого ближче усього підходить досліджуваний розподіл.

Приклади вирішення задачі.

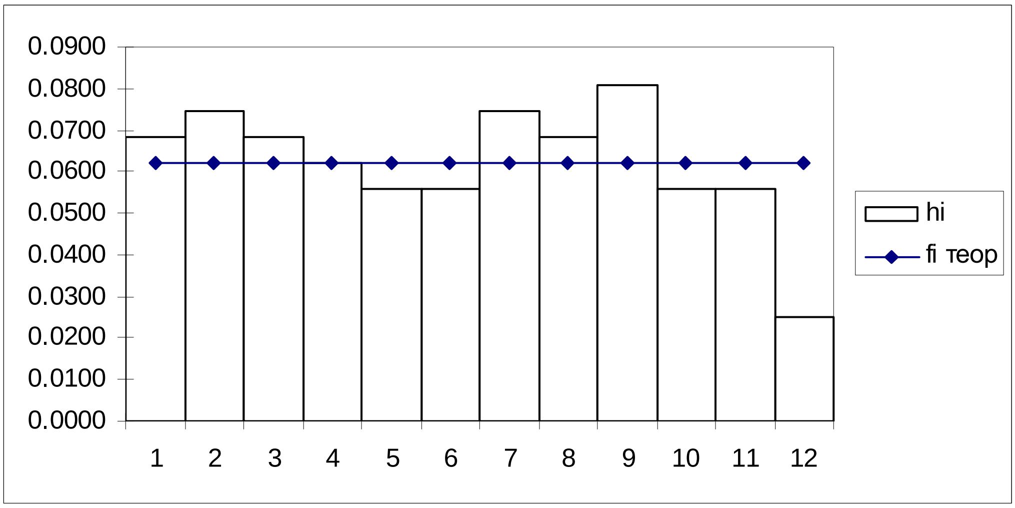
Варіант А.

Вихідні дані:

4.8467	12.9628	9.3495	16.4017	9.0761	16.5549	7.0532	7.6100
7.9379	3.3204	2.9131	13.7651	14.1493	5.4408	3.7188	3.2660
9.0316	5.0934	13.1611	8.8034	6.2457	17.3561	17.4386	9.1817
5.5954	15.7492	18.3164	2.9781	14.0546	8.9109	14.8116	11.0091
9.7844	14.3664	9.6883	3.4857	5.4967	12.2179	12.2765	13.9716
12.2953	2.9978	11.1385	2.9056	5.9705	15.7652	11.5515	15.2869
13.3486	16.5690	15.2977	4.2808	5.5114	9.0305	10.7604	6.4758
17.6075	14.8104	15.8264	7.4771	11.9982	14.9045	6.6351	10.4492
11.1525	9.8217	4.6938	17.8907	13.4044	7.6967	8.2409	15.1920
14.1967	12.8126	7.7323	13.5751	14.2777	6.0178	5.7643	4.5950
13.3691	5.3586	14.1319	15.4431	7.7789	13.3484	14.5843	4.8413
9.2909	14.2548	10.9000	18.9062	16.5063	4.5667	13.5597	10.9410
12.2266	15.7549	8.7716	5.1522	17.5212	19.0202	6.1730	7.5362
3.3680	12.0995	11.9077	10.1777	13.5423	3.2311	10.3137	7.1981
6.4126	3.2374	6.3173	16.4537	12.0274	6.8320	13.0451	15.5925

x_{min}	x_{max}	$\Delta_i=(x_{max}-x_{min})/12$
2.9056	19.0202	1.3429

№ інтервалу	x_i	x_{i+1}	m_i	p_i^*	h_i	f_i теор
1	2.9056	4.2485	11	0.0917	0.0683	0.0621
2	4.2485	5.5914	12	0.1000	0.0745	0.0621
3	5.5914	6.9343	11	0.0917	0.0683	0.0621
4	6.9343	8.2772	10	0.0833	0.0621	0.0621
5	8.2772	9.6200	9	0.0750	0.0559	0.0621
6	9.6200	10.9629	9	0.0750	0.0559	0.0621
7	10.9629	12.3058	12	0.1000	0.0745	0.0621
8	12.3058	13.6487	11	0.0917	0.0683	0.0621
9	13.6487	14.9916	13	0.1083	0.0807	0.0621
10	14.9916	16.3344	9	0.0750	0.0559	0.0621
11	16.3344	17.6773	9	0.0750	0.0559	0.0621
12	17.6773	19.0202	4	0.0333	0.0248	0.0621
Σ			120	1		



Висувається гіпотеза про рівномірний закон розподілу досліджуваної випадкової величини.

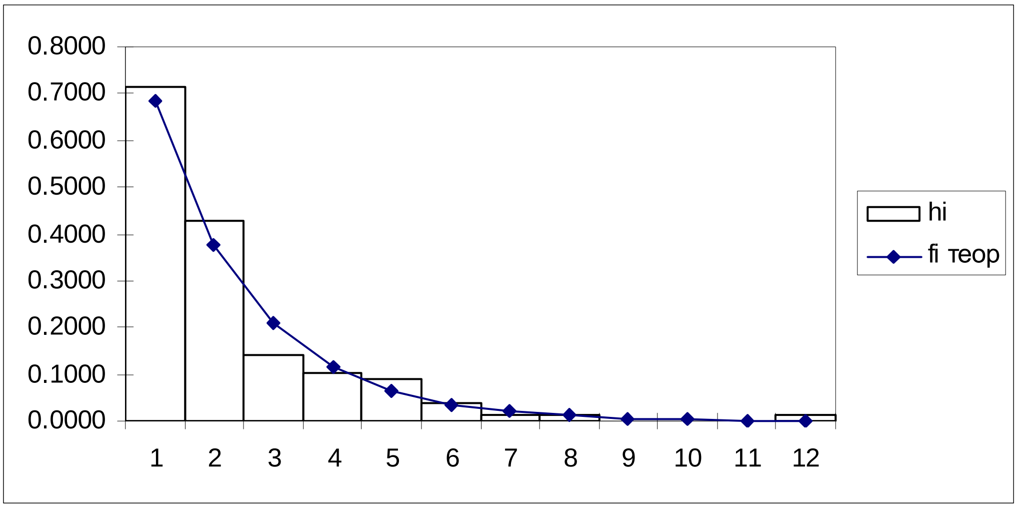
Варіант В.

Вихідні дані:

0.5718	0.4201	0.0054	2.4551	0.1314	1.5684	0.5216	0.1879
0.4130	0.5402	1.9503	1.2811	0.1957	0.7998	0.1335	0.0082
1.2281	3.1938	0.9514	0.0082	0.1967	1.7396	2.6439	0.9671
0.1403	1.2313	0.2690	0.1469	0.2181	0.9203	1.7799	0.2274
0.1562	1.3141	0.9110	0.0241	3.1630	0.4248	0.2749	0.8385
0.5489	1.1208	0.9304	0.1770	0.8186	0.0424	0.1160	0.0154
0.4316	0.5002	0.5212	2.9174	1.0317	0.7882	3.4780	2.3309
0.8717	0.3496	2.5385	0.5295	0.3284	0.5653	0.1509	0.9061
0.5127	0.0072	0.2274	1.0646	0.2277	7.6930	0.1261	0.1431
1.4845	3.5396	2.7041	0.4184	0.9752	0.7858	1.2992	0.9314
0.1748	1.4368	1.9304	1.8643	2.6358	0.6962	2.4378	0.1051
1.2127	0.4849	3.8199	0.6695	3.8569	0.3125	0.0432	2.4774
4.8876	1.4134	1.2387	3.0755	2.5019	0.9097	0.3139	0.5477
0.8412	0.4366	0.5867	0.9634	0.9505	0.9788	1.3310	0.7883
0.2675	0.3500	1.1479	0.0953	0.3248	0.7912	1.2008	1.4677

x_{min}	x_{max}	$\Delta_i=(x_{max}-x_{min})/12$
0.0054	7.6930	0.6406

№ інтервалу	x_i	x_{i+1}	m_i	p_i^*	h_i	f_i теор
1	0.0054	0.6460	55	0.4583	0.7154	0.6839
2	0.6460	1.2866	33	0.2750	0.4293	0.3784
3	1.2866	1.9273	11	0.0917	0.1431	0.2093
4	1.9273	2.5679	8	0.0667	0.1041	0.1158
5	2.5679	3.2085	7	0.0583	0.0911	0.0641
6	3.2085	3.8492	3	0.0250	0.0390	0.0354
7	3.8492	4.4898	1	0.0083	0.0130	0.0196
8	4.4898	5.1305	1	0.0083	0.0130	0.0108
9	5.1305	5.7711	0	0.0000	0.0000	0.0060
10	5.7711	6.4117	0	0.0000	0.0000	0.0033
11	6.4117	7.0524	0	0.0000	0.0000	0.0018
12	7.0524	7.6930	1	0.0083	0.0130	0.0010
Σ			120	1		



Висувається гіпотеза про показовий закон розподілу досліджуваної випадкової величини.

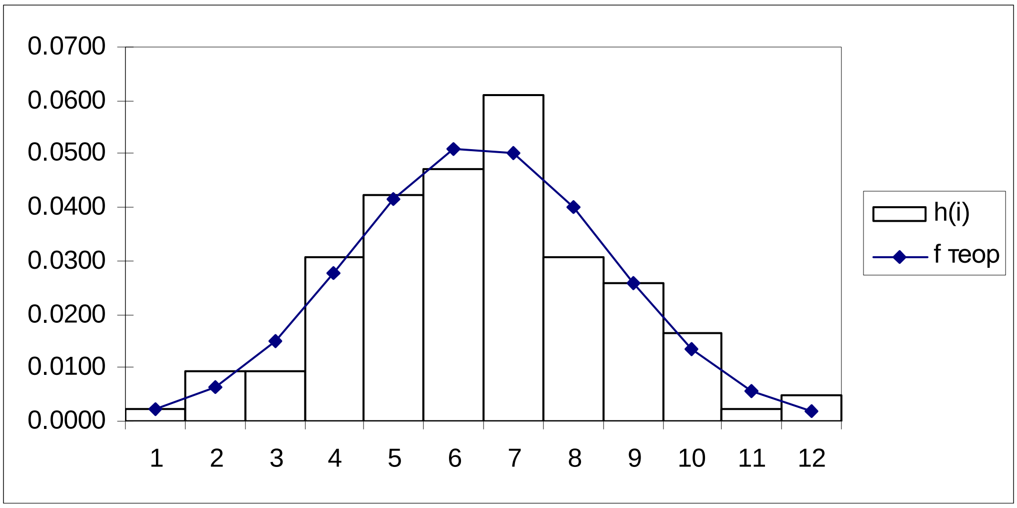
Варіант С.

Вихідні дані:

21.9127	33.9000	17.8108	20.6635	28.0139	20.4649	32.0696	32.7042
47.5807	26.8992	21.0090	32.7729	32.3879	39.6364	27.0290	28.7844
27.3458	31.1870	13.5304	9.4052	25.6430	25.0631	26.4673	16.8856
19.2236	26.3964	23.7193	19.1509	21.0568	17.4472	29.3717	36.8890
37.2957	22.1205	25.4153	28.5411	25.0545	24.4811	18.4894	30.1899
16.7999	25.2566	33.9311	19.1669	33.5968	21.9890	29.0924	9.7886
35.1000	39.9651	27.0621	20.4999	23.8667	31.4315	33.8930	16.5916
20.2323	18.0676	23.5023	34.9182	17.8181	25.2655	15.4520	19.4361
24.2995	26.4716	18.4080	25.9534	36.1375	28.8333	22.8759	26.3660
36.9573	31.8018	28.6831	21.4950	34.5344	28.9821	23.4336	20.3173
30.2262	13.0123	14.2993	47.1693	26.5753	26.8632	20.3616	32.2115
32.2176	36.7825	27.4694	28.1868	26.7761	39.0296	22.4707	33.9070
19.6587	25.2319	12.0670	22.2327	21.5765	10.8404	28.4685	29.6275
42.2819	5.0627	23.4138	18.3602	19.5600	32.0359	33.3359	23.7446
39.0005	27.8452	24.6446	28.0512	23.8713	37.2355	28.3752	23.7889

x_{min}	x_{max}	$\Delta_i=(x_{max}-x_{min})/12$
5.0627	47.5807	3.5432

№ інтервалу	x(i)	x(i+1)	m(i)	p*(i)	h(i)	f теор
1	5.0627	8.6059	1	0.0083	0.0024	0.0023
2	8.6059	12.1491	4	0.0333	0.0094	0.0065
3	12.1491	15.6922	4	0.0333	0.0094	0.0149
4	15.6922	19.2354	13	0.1083	0.0306	0.0277
5	19.2354	22.7785	18	0.1500	0.0423	0.0417
6	22.7785	26.3217	20	0.1667	0.0470	0.0507
7	26.3217	29.8649	26	0.2167	0.0612	0.0500
8	29.8649	33.4080	13	0.1083	0.0306	0.0399
9	33.4080	36.9512	11	0.0917	0.0259	0.0258
10	36.9512	40.4943	7	0.0583	0.0165	0.0135
11	40.4943	44.0375	1	0.0083	0.0024	0.0057
12	44.0375	47.5807	2	0.0167	0.0047	0.0020
Σ			120	1		



Висувається гіпотеза про нормальний закон розподілу досліджуваної випадкової величини.

Контрольні питання:

1. Предмет математичної статистики і її основні завдання.
2. Проста й впорядкована статистична сукупність.
3. Статистична функція розподілу.
4. Статистичний ряд розподілу.
5. Гістограма.

Заняття 7.

Визначення числових характеристик статистичного розподілу. Згладжування статистичних рядів

Задача. Для заданої вибірки значень випадкової величини і на основі результатів заняття №6 :

1. Визначити значення статистичного середнього m_x*, статистичної дисперсії D_x*, статистичного середнє квадратичне відхилення σ_x*.
2. Оцінити значення параметрів функції щільності закону розподілу досліджуваної випадкової величини і побудувати графік функції щільності.

Алгоритм вирішення задачі.

1. Визначення статистичних числових характеристик:

$$m_x^* = \sum_{i=}^{k} \tilde{x}_i p_i^*$$

$$D_x^* = \sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - m_x\right)^2 p_i^*$$

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x}$$

2. Згладжування статистичного ряду й побудова графіка функції щільності.

   За видом гістограми візуально визначають вид теоретичного розподілу, до якого ближче всього підходить досліджуваний розподіл. Для завдання значень параметрів функції щільності використовують значення статистичних числових характеристик, отримані на попередньому етапі.

- Для нормального закону: $m=m_x$*; $\sigma=\sigma_x$*
- Для показового закону $\lambda=1/m_x$*.
- Для рівномірного закону $a=x_{min}$; $b=x_{max}$.

Обчислення f(x) слід виконати відповідно до висунутої гіпотези для середини кожного інтервалу. Результати подати в таблиці, побудованої на занятті №6

Функція щільності має такий вигляд:

- Для нормального закону: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
- Для показового закону $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- Для рівномірного закону $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

Побудову графіка щільності необхідно виконати на гістограмі, сполучивши осі f(x) і h

Варіант А

№ інтервалу	$x_i^{\sim}=(x_i+x_{i+1})/2$	$x_i^{\sim} p_i^*$	$(x_i^{\sim} - m_i^*)^2$	$(x_i^{\sim} - m_i^*)^2 p_i^*$
1	3.581	0.328	47.031	4.311
2	4.924	0.492	30.420	3.042
3	6.266	0.574	17.413	1.596
4	7.609	0.634	8.011	0.668
5	8.951	0.671	2.214	0.166
6	10.294	0.772	0.021	0.002
7	11.636	1.164	1.433	0.143
8	12.979	1.190	6.449	0.591
9	14.321	1.551	15.070	1.633
10	15.664	1.175	27.296	2.047
11	17.006	1.275	43.126	3.234
12	18.349	0.61	62.561	2.09
Σ		10.44		19.52

$$m_x^* = \sum_{i=}^{k} \tilde{x}_i p_i$$

$$D_x^* = \sum_{i=1}^{k} (\tilde{x}_i - m_x)^2 p_i$$

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x}$$

$$f_{imep} = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}}$$

Статистичне середнє	m_x^*=	10.44
Статистична дисперсія	D_x^*=	19.52
Статистичне середнє квадратичне відхилення	σ_x^*=	4.42

Варіант B

№ інтервалу	$x_i^{\sim}=(x_i+x_{i+1})/2$	$x_i^{\sim}p_i*$	$(x_i^{\sim} - m_i*)^2$	$(x_i^{\sim} - m_i*)^2 p_i*$
1	0.330	0.151	0.598	0.274
2	0.970	0.267	0.018	0.005
3	1.610	0.161	0.257	0.026
4	2.250	0.131	1.315	0.077
5	2.890	0.169	3.192	0.186
6	3.530	0.088	5.889	0.147
7	4.170	0.035	9.404	0.078
8	4.810	0.040	13.739	0.114
9	5.450	0.000	18.894	0.000
10	6.090	0.000	24.867	0.000
11	6.730	0.000	31.659	0.000
12	7.370	0.06	39.271	0.33
Σ		1.10		1.23

$$m_x^* = \sum_{i=}^{k} \tilde{x}_i p_i$$

$$D_x^* = \sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - m_x\right)^2 p_i$$

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x}$$

$$f_{imeop} = \lambda e^{-\lambda \tilde{x}_i}$$

$$\lambda = \frac{1}{m_x^*}$$

Статистичне середнє	m_x^*=	1.10
Статистична дисперсія	D_x^*=	1.23
Статистичне середнє квадратичне ві-дхилення	σ_x^*=	1.11
	λ=	0.906

Варіант C

№ інтервалу	$x_i^{\sim}=(x_i+x_{i+1})/2$	$x_i^{\sim}p_i^*$	$(x_i^{\sim}-m_i^*)^2$	$(x_i^{\sim}-m_i^*)^2p_i^*$
1	6.832	0.057	371.782	3.098
2	10.375	0.346	247.694	8.256
3	13.918	0.464	148.717	4.957
4	17.462	1.892	74.851	8.109
5	21.005	3.151	26.095	3.914
6	24.548	4.091	2.449	0.408
7	28.092	6.087	3.914	0.848
8	31.635	3.427	30.489	3.303
9	35.178	3.225	82.175	7.533
10	38.722	2.259	158.971	9.273
11	42.265	0.352	260.877	2.174
12	45.808	0.76	387.894	6.46
Σ		26.11		58.34

$$m_x^* = \sum_{i=}^{k} \tilde{x}_i p_i$$

$$D_x^* = \sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - m_x\right)^2 p_i$$

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x}$$

$$f_{imeop} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^*} e^{-\frac{\left(\tilde{x}_i - m_x^*\right)^2}{2\left(\sigma_x^*\right)^2}}$$

Статистичне середнє	$m_x^*=$	26.11
Статистична дисперсія	$D_x^*=$	58.34
Статистичне середнє квадратичне відхилення	$\sigma_x^*=$	7.64

Контрольні питання:

1. Числові характеристики статистичного розподілу.
2. Вирівнювання статистичних рядів. Метод моментів.

Заняття 8.

Перевірка статистичних гіпотез.

Задача. Для заданої вибірки значень випадкової величини і на основі результатів занять №6 і №7 провести перевірку висунутої гіпотези про закон розподілу випадкової величини за допомогою критерію χ^2 Пірсона. Для цього:

- обчислити значення критерію $\chi^2_{набл}$;
- обчислити кількість ступенів свободи і за таблицею знайти значення $\chi^2_{крит}$ (рівень значущості $p_{крит}$ прийняти рівним 0.05);
- зробити висновок про відповідність висунутої гіпотези розглянутій вибірці значень випадкової величини.

Алгоритм перевірки статистичної гіпотези про закон розподілу випадкової величини:

- обчислюються теоретичні частоти влучення випадкової величини в i-й інтервал

$$p_i = P\{x_i < X < x_{i+1}\},$$

  де x_i, x_{i+1} – чисельні значення відповідно лівої й правої границі i-го інтервалу.

- Підраховуємо $\chi^2_{набл}$:

$$\chi^2_{набл} = n\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i}$$

- Визначаємо число ступенів свободи r=k-1-s,

  де k– число інтервалів, s– число параметрів емпіричного розподілу, використаних при визначенні теоретичного розподілу, яке визначає число зв'язків між цими розподілами.

- За значеннями рівня значущості $p_{крит}$ і числа ступенів свободи r з таблиці розподілу χ^2 знаходимо критичне $\chi^2_{крит}$ і порівнюємо з розрахунковим $\chi^2_{набл}$. Якщо розрахункова величина виявляється більше критичного табличного значення (для даного рівня імовірності і відповідного числа ступенів свободи), то частоти, що спостерігаються, значно відрізняються від теоретичних і гіпотезу слід відкинути. У противному виразі висунуту гіпотезу приймаємо. Усі розрахунки з даного розділу слід звести в таблицю.

Варіант А.

Перевіряємо гіпотезу про рівномірний закон розподілу досліджуваної випадкової величини

№ інтервалу	p_i^*	p_i	$(p_i^*-p_i)^2/p_i$
1	0.092	0.083	0.001
2	0.100	0.083	0.003
3	0.092	0.083	0.001
4	0.083	0.083	0.000
5	0.075	0.083	0.001
6	0.075	0.083	0.001
7	0.100	0.083	0.003
8	0.092	0.083	0.001
9	0.108	0.083	0.008
10	0.075	0.083	0.001
11	0.075	0.083	0.001
12	0.033	0.083	0.030
Σ	1.000	1.000	0.050

$$p_i = \frac{\Delta_i}{x_{\max} - x_{\min}}$$

$$\chi^2_{набл} = n\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i}$$

r=k-1-s
для равномерного закона
s=2
r=12-1-2=9

$\chi^2_{набл}=$	6.00
$\chi^2_{крит}=$	16.90

Тому що $\chi^2_{набл}<\chi^2_{крит}$, то висунута гіпотеза не суперечить експериментальним даним.

Варіант В.

Перевіряємо гіпотезу про показовий закон розподілу досліджуваної випадкової величини

$$p_i = F(x_{i+1}) - F(x_i) = \left(1 - e^{-\lambda x_{i+1}}\right) - \left(1 - e^{-\lambda x_i}\right)$$
$$p_i = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$$

№ інтервалу	p_i^*	p_i	$(p_i^*-p_i)^2/p_i$
1	0.458	0.436	0.001
2	0.275	0.244	0.004
3	0.100	0.137	0.010
4	0.058	0.077	0.004
5	0.058	0.043	0.006
6	0.025	0.024	0.000
7	0.008	0.013	0.002
8	0.008	0.008	0.000
9	0.000	0.004	0.004
10	0.000	0.002	0.002
11	0.000	0.001	0.001
12	0.008	0.001	0.078
Σ	1.000	0.990	0.110

$\chi^2_{набл}=$	13.54
$\chi^2_{крит}=$	18.30

$$\chi^2_{набл} = n\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i}$$

r-число степеней свободы
r=k-1-s
для показательного закона
s=1
r=12-1-1=10

Тому що $\chi^2_{набл}<\chi^2_{крит}$, то висунута гіпотеза не суперечить експериментальним даним

Варіант С

Перевіряємо гіпотезу про нормальний закон розподілу досліджуваної випадкової величини

$$p_i = F(x_{i+1}) - F(x_i) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - m_x^*}{\sigma_x^*}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - m_x^*}{\sigma_x^*}\right)$$

№ інтервалу	p_i^*	p_i	$(p_i^*-p_i)^2/p_i$
1	0.008	0.008	0.000
2	0.033	0.023	0.005
3	0.033	0.052	0.007
4	0.108	0.098	0.001
5	0.150	0.147	0.000
6	0.167	0.180	0.001
7	0.217	0.177	0.009
8	0.108	0.142	0.008
9	0.092	0.092	0.000
10	0.058	0.048	0.002
11	0.008	0.020	0.007
12	0.017	0.007	0.013
Σ	1.000	0.990	0.050

$$\chi^2_{набл} = n\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(p_i^* - p_i\right)^2}{p_i}$$

r=k-1-s
для нормального закона
s=2
r=12-1-2=9

$\chi^2_{набл}=$	6.39
$\chi^2_{крит}=$	16.90

Тому що $\chi^2_{набл}<\chi^2_{крит}$, то висунута гіпотеза не суперечить експериментальним даним

Контрольні питання:

1. Міра розбіжності теоретичного і статистичного розподілів за критерієм χ^2 Пірсона.
2. Визначення значення числа ступенів свободи розподілу $\chi^{2.}$
3. Схема застосування критерію χ^2 до оцінки погодженості теоретичного й статистичного розподілів.

Додаток 1.

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

Додаток 2.

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Додаток 3.

Критичні точки розподілу χ^2.

Число ступенів свободи r	Рівень значущості $p_{крит}$		
	0.1	0.05	0.01
1	2.71	3.84	6.63
2	4.61	5.99	9.21
3	6.25	7.81	11.3
4	7.78	9.49	13.3
5	9.24	11.1	15.1
6	10.6	12.6	16.8
7	12.0	14.1	18.5
8	13.4	15.5	20.1
9	14.7	16.9	21.7
10	16.0	18.3	23.2
11	17.3	19.7	24.7
12	18.5	21.0	26.2
13	19.8	22.4	27.7
14	21.1	23.7	29.1
15	22.3	25.0	30.6
16	23.5	26.3	32.0
17	24.8	27.6	33.4
18	26.0	28.9	34.8
19	27.2	30.1	36.2
20	28.4	31.4	37.6
21	29.6	32.7	38.9
22	30.8	33.9	40.3
23	32.0	35.2	41.6
24	33.2	36.4	43.0
25	34.4	37.7	44.3
30	40.3	43.8	50.9
35	46.1	49.8	57.3
40	51.8	55.8	63.7

Список літератури

1. Вентцель Е.С., Вівчарів Л.А. Теорія ймовірностей і її інженерні додатки.– М.: Наука, 1988.– 480 с.
2. Вентцель Е.С., Вівчарів Л.А. Прикладні задачі теорії ймовірностей. – М.: Радіо і зв'язок. 1983. – 416 с., іл.
3. Гмурман В.Е. Теорія ймовірностей і математична статистика. Учебн. посібник для втузів.- М., Вища. шк., 1977.- 479 с., іл.
4. Гмурман В.Е. Керівництво до рішення задач по теорії ймовірностей і математичній статистиці: Навч. посібник для втузів. - М., Вища. шк., 1979. - 400 с.
5. Вентцель Е.С. Теорія ймовірностей. -М., Наука, 1969. -575 с.
6. Вентцель Е.С., Вівчарів Л.А. Теорія ймовірностей. Задачі і вправи. -М.: Наука, 1973. - 365 с.
7. Гнеденко В.В., Ханчин А.Я. Елементарне введення в теорію ймовірностей. -М.: Наука, 1988. - 160 с.
8. Феллер В. Введення в теорію ймовірностей і її додатки. У 2-х томах / Пер. с англ. -М.: Світ. -1984.
9. Жалдак М.И., Квитко А.Н. Теорія ймовірностей з елементами інформатики. Практикум. / Під общ. ред. Ядренко М.И. -К.: Вища шк., 1989. -263 с.
10. Коваленкко И.Н., Філіппова А.А. Теорія ймовірностей і математична статистика. Учебн. посібник для втузів. -М., Вища шк., 1973.-368с.
11. Зубків А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Збірник задач по теорії ймовірностей. Навч. посібник для втузів. -М.: Наука, 1989.
12. Конспект лекцій з дисципліни “Теорія ймовірностей і математична статистика”. Розділ: Теорія ймовірностей/ М.В. Федоров, О.М. Хренов, М.Ю. Воєводіна. – Х.: ХНАМГ, 2003. – 86с.
13. Конспект лекцій з дисципліни “Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики”. Частина 2: Елементи математичної статистики / М.В. Федоров, О.М. Хренов, М.Ю. Воєводіна. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 28с.

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни
“Теорія ймовірностей та математична статистика” для студентів 2 курсу
денної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 – ”Будівництво”,
спец. “Промислове та цивільне будівництво”,
“Міське будівництво та господарство”

Укладачі: Федоров Микола Вікторович,
Хренов Олександр Михайлович

Відповідальний за випуск О.М. Хренов
Редактор М.З. Аляб'єв

План 2009, поз. 537 М

Підп. до друку 22.05.2009 р. Формат 60x84 1/16 Папір офісний
Друк. на ризографі Ум.– друк. арк. 2,0
Тираж 50 прим. Зам. №

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
61002, Харків, вул. Революції, 12